Gebrochen-rationale Funktionen • Grenzwerte
Übung

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+7}{5x^2+2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{x^2+x}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+4}{3x+5}$

d) $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{3x-6}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+4)}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-4x^2}{x^3-x-1}$

h) $\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{2x+6}{3x+6}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+7}$

j) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{2x^2+2x-4}{3x^2-9x+6}$

2. Erläutern Sie knapp, wie der Globalverlauf (d.h. das Verhalten für $x \to \pm\infty$) einer gebrochen-rationalen Funktion f von Zählergrad z und Nennergrad n abhängt.

3. Ermitteln Sie den Globalverlauf der Funktionen.

a) $f(x) = \frac{2x+2}{x+1}$

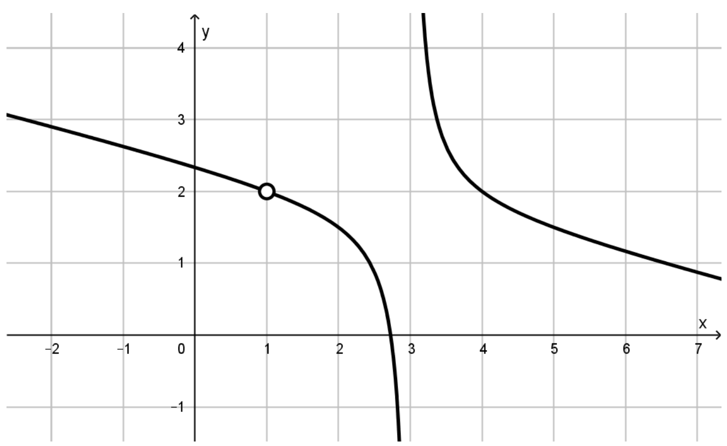
b) $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$

c) $f(x) = \frac{x^2+7}{2x-6}$

4. Bestimmen Sie das die maximale Definitionsmenge D_{max} von f und das Verhalten an den Rändern von D_{max}. Skizzieren Sie anschließend den Graphen von f im Bereich $x \in [-5; 4]$.

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$$

5. Lesen Sie alle Grenzwerte an den Rändern der Definitionsmenge folgendes Graphen ab.



6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2-x-6}{2x^2-10x+12}$.

   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_{max} von f!

   b) Welche Nullstellen besitzt f?

   c) Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_{max}.

   d) Berechnen Sie die Werte $f(-4)$, $f(0)$ sowie $f(7)$ und skizzieren Sie den Graphen von f für $x \in [-4; 7]$. Verwenden Sie hierzu auch alle bisherigen Ergebnisse.

Gebrochen-rationale Funktionen • Grenzwerte
Lösung

1.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+7}{5x^2+2x+1} = 0$, da Zählergrad z kleiner als Nennergrad n.

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2+x}{x-1} = 6$, Einsetzen ist möglich!

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+4}{3x+5} = \frac{2}{3}$, weil $z = n$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} 3 = 3$, der Grenzwert einer Konstante ist die Konstante selbst.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty$, existiert demnach nicht. Es ist $z > n$.

f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x+4} = 0$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-4x^2}{x^3-x-1} = \frac{3}{1} = 3$ wegen $z = n$

h) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{2x+6}{3x+6} = +\infty$, existiert also nicht.

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x+7} = 0$

j) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x^2+2x-4}{3x^2-9x+6} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2(x+2)(x-1)}{3(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2(x+2)}{3(x-2)} = \frac{6}{-3} = -2$

2.

- Ist in einer gebrochen-rationalen Funktion f der Grad des Zählers z kleiner als der Grad n des Nenners, so ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
- Falls Zählergrad und Nennergrad gleich sind ($z = n$), so erhält man eine Konstante ungleich Null durch Vergleich der Leitkoeffizienten. Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+3}{5x^2+x-12} = \frac{2}{5}$.
- Ist $z > n$, so divergiert f für sehr große x-Werte gegen $-\infty$ oder $+\infty$ und es existiert kein Grenzwert an sich.

3.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2 = 2$.
Hinweis: Der Graph ist eine Waagrechte bei $y = 2$ mit einem Loch bei $x = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+4} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+7}{2x-6} = \pm\infty$, also nicht existent.

4. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

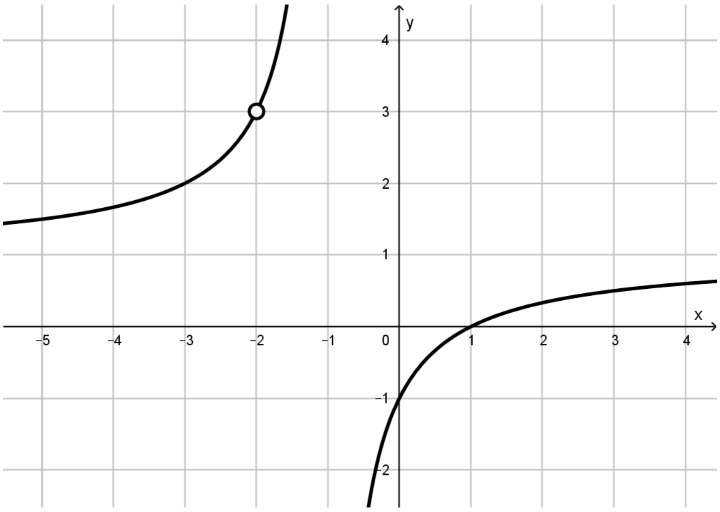
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$



5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

6.

a) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

b) $x_1 = -2$; $[x_2 = 3 \notin D_{max}]$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \frac{5}{2}$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \frac{5}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

d) $f(-4) = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$

$f(0) = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

$f(7) = \frac{9}{10} = 0{,}9$